

Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Reconocer situaciones que pueden resolverse con ecuaciones
- Traducir al lenguaje matemático enunciados del lenguaje ordinario.
- Conocer los elementos de una ecuación.
- Resolver ecuaciones de primer grado.
- Resolver problemas utilizando las ecuaciones.

Antes de empezar

1. Ecuaciones, ideas básicas.....pág. 100
 - Igualdades y ecuaciones
 - Elementos de una ecuación
 - Ecuaciones equivalentes
2. Reglas para la resolución.....pág. 104
 - Sin denominadores
 - Con denominadores
 - Resolución general de ecuaciones
3. Aplicaciones.....pág. 108
 - Problemas con ecuaciones

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

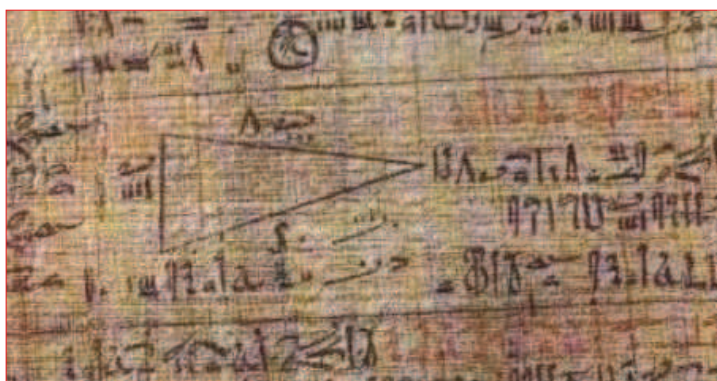
Autoevaluación

Actividades para enviar al tutor

Antes de empezar

El documento más antiguo en el que se presentan problemas que se resuelven con ecuaciones es el papiro Rhind de 1650 a.C. (en la imagen puede verse un fragmento).

Uno de esos problemas dice: **"Un montón más la séptima parte del montón es igual a 19. ¿Cuánto hay en el montón?"**



Observa que en aquella época aún no se utilizaba la "x" para resolver las ecuaciones. El lenguaje algebraico que ahora conocemos no existía. Imagina el esfuerzo y la técnica que debían de tener para plantear y buscar soluciones a los problemas con ecuaciones.

Investiga:

La solución del problema del papiro es un número fraccionario (la puedes ver al final del Tema), pero si en vez de **19** ponemos **32** la solución es un número entero. ¿Puedes averiguar de cuántas unidades constaría el montón en ese caso?

1. Ecuaciones: ideas básicas

Igualdades y ecuaciones.

Utilizamos ecuaciones cuando tratamos de averiguar una cierta cantidad, desconocida, pero de la que sabemos que cumple cierta condición.

La cantidad desconocida se llama **incógnita** y se representa por "**x**" (o cualquier otra letra) y la condición que cumple se escribe como una igualdad algebraica a la que llamamos ecuación.

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores de la o las incógnitas con los se cumple la igualdad.

Ejemplo

Situaciones que se expresan con ecuaciones

Una madre reparte 57€ entre tres hijos de forma que el mayor reciba 10€ más que el segundo, y éste 10€ más que el tercero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Llamamos "**x**" al dinero que recibe el hijo pequeño, el que recibe menos

Luego el mediano recibe "**x+10**", y el mayor "**x+10+10**"

Como en total se reparten 57€, esa será la suma de "**x**" y "**x+10**" y "**x+10+10**"

Escribimos la ecuación:

$$x+(x+10)+(x+10+10) = 57$$

o, agrupando: $3x+30 = 57$

Aún no hemos resuelto el problema, nuestro primer paso es plantear y escribirlo en forma de ecuación.

Ejemplo

Se reparten 40 € para dos personas, de manera que uno recibe 10 € más que el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

Llamamos "**x**" al dinero que recibe la 1ª persona, la que recibe menos.

¿Cuánto recibe entonces la 2ª persona?

La segunda persona recibiría "**x+10**".

Entre las dos se reparten en total 40 €, entonces la suma de "**x**" y "**x+10**" debe ser 40.

Escribimos la ecuación:

$$x + (x+10) = 40$$

o agrupando:

$$2x + 10 = 40$$

Elementos de una ecuación.

Miembros: Son las expresiones que aparecen a cada lado de la igualdad. El de la izquierda se llama 1^{er} miembro. El de la derecha se llama 2^o miembro.

Términos son los sumandos que forman los miembros.

Incógnitas: Son las letras que aparecen en la ecuación.

Soluciones: Son los valores que deben tomar las letras para que la igualdad sea cierta.

Grado de una ecuación: Es el mayor de los grados de los monomios que forman los miembros.

Ejemplos

$$3x - 5 = 7 - 2x$$

1^{er} miembro 2^o miembro

Incógnita: x

Solución: $x = \frac{12}{5}$

Grado: 1

Los términos son:
 $3x$, -5 , 7 , $-2x$

$$3x^2 = 48$$

1^{er} miembro 2^o miembro

Incógnita: x

Soluciones: $x=3$, $x=-3$

Grado: 2

Los términos son:
 $3x^2$, 48

En el segundo ejemplo, observa que si x toma otro valor (por ej: 6 , -12 , $5/2$, ...) la igualdad no se cumple y por tanto no son soluciones.

Ecuaciones equivalentes.

Se llaman **ecuaciones equivalentes** a las que tienen las mismas soluciones.

- Si se suma o resta una cantidad, o expresión, a los dos miembros de una ecuación se obtiene otra equivalente.
Regla práctica: "lo que está sumando pasa restando, o viceversa".
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número, o expresión, se obtiene otra equivalente.
Regla práctica: "lo que está multiplicando pasa dividiendo, o viceversa".

Ejemplos

Una madre reparte 57€ entre tres hijos de forma que el mayor reciba 10€ más que el segundo, y éste 10€ más que el tercero. ¿Cuánto recibe cada uno?

Pequeño: x Mediano: $x+10$ Mayor: $x+10+10$

Ecuación: $x+(x+10)+(x+10+10) = 57$

$3x+30 = 57$

(Haciendo: $3x+10-10 = 40-10$)

$3x = 57 - 30$

$3x = 27$

(Haciendo: $\frac{3x}{3} = \frac{27}{3}$)

$x = \frac{27}{3}$

$x = 9$

Pequeño: 9€ Mediano: 19€ Mayor: 29€

Se reparten 40€ para dos personas, de manera que uno reciba 10€ más que el otro. ¿Cuánto recibe cada uno?

1ª persona recibe: x 2ª persona recibe: $x+10$

Ecuación: $x+(x+10) = 40$

$2x+10 = 40$

(Haciendo: $2x+10-10 = 40-10$)

$2x = 40 - 10$

$2x = 30$

(Haciendo: $\frac{2x}{2} = \frac{30}{2}$)

$x = \frac{30}{2}$

$x = 15$

1ª persona: 15€ 2ª persona: 25€

Ejercicios resueltos

1. Si al triple de un número le restamos 16 se obtiene 20. ¿Cuál es el número?

SOLUCIÓN

Al número que buscamos lo llamamos: x

Podemos plantear la siguiente ecuación: $3x - 16 = 20$

Agrupamos $3x = 20 + 16$, $3x = 36$

Solucionamos $x = 36/3$, $x = 12$

El número buscado es 12.

2. Pedro, que actualmente tiene 42 años, tiene 8 años más que el doble de la edad de Antonio. ¿Qué edad tiene Antonio?

SOLUCIÓN

A la edad de Antonio la llamamos: x

Podemos plantear la siguiente ecuación: $2x + 8 = 42$

Agrupamos $2x = 42 - 8$, $2x = 34$

Solucionamos $x = 34/2$, $x = 17$

La edad de Antonio es 17.

3. Al sumarle a un número 34 unidades se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 3. ¿Cuál es ese número?

SOLUCIÓN

Al número que buscamos lo llamamos: x

Podemos plantear la siguiente ecuación: $x + 34 = 3x$

Agrupamos $x - 3x = -34$, $-2x = -34$

Solucionamos $x = -34/-2$, $x = 17$

El número buscado es 17.

Ejercicios resueltos

4. La suma de tres números naturales consecutivos es igual al menor más 19. ¿Cuáles son estos tres números?

SOLUCIÓN

Los números que buscamos los llamamos:
Podemos plantear la siguiente ecuación:
Agrupamos

$$\begin{aligned} & \mathbf{x, x+1, x+2} \\ & \mathbf{(x) + (x+1) + (x+2) = x + 19} \\ & x + x + 1 + x + 2 = x + 19 \\ & x + x + x - x = 19 - 1 - 2 \\ & 2x = 16 \\ & x = 16/2, x = 8 \end{aligned}$$

Solucionamos

Los números buscados son 8, 9 y 10.

5. En un trabajo, Miguel ha ganado el doble de dinero que Ana, y Abel el triple de Miguel. Si en total han obtenido 144 €, ¿cuánto ha ganado cada uno?

SOLUCIÓN

Escribimos los nombres con sus incógnitas:

Ana: x , Miguel: $2x$,
Abel: $3 \cdot 2x = 6x$

Podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x + 2x + 6x = 144}$$

Agrupamos

$$9x = 144$$

Solucionamos

$$x = 144/9, x = 16$$

Ana ganó 16€ , Miguel 32€ y Abel 96€ .

6. Tres hermanos se reparten 89€. El mayor debe recibir el doble que el mediano y éste 7€ más que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

SOLUCIÓN

Escribimos los hermanos con sus incógnitas:

Pequeño: x , Mediano: $x+7$,
Mayor: $2(x+7)$

Podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\mathbf{(x) + (x+7) + (2(x+7)) = 89}$$

Agrupamos

$$x + x + 7 + 2x + 14 = 89$$

Solucionamos

$$\begin{aligned} 4x &= 89 - 7 - 14 & , & & 4x &= 68 \\ x &= 68/4 & , & & x &= 17 \end{aligned}$$

El pequeño recibió 17€ , mediano 24€ y mayor 48€ .

2. Reglas para resolver una ecuación

Ecuación sin denominadores.

Para este tipo de ecuaciones seguimos los siguientes pasos:

1º Agrupar los monomios que lleven la incógnita ("las x") en un miembro de la ecuación y los términos independientes en el otro miembro.

2º Despejar la incógnita: Dejar la incógnita sola en un miembro de la ecuación.

Ejemplos

Sin paréntesis

$$3x - 2 = -7x + 9$$

$$3x + 7x = 9 + 2$$

$$10x = 11$$

$$x = \frac{11}{10}$$

$$0 = 8x - 6 + 4x - 3$$

$$6 + 3 = 8x + 4x$$

$$9 = 12x$$

$$x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Con paréntesis

$$(-3)(7 - 6x) = 9x - 8(3x - 7)$$

$$-21 + 18x = 9x - 24x + 56$$

$$18x - 9x + 24x = 56 + 21$$

$$33x = 77$$

$$x = \frac{77}{33} = \frac{7}{3}$$

$$x + 5(6 - 8x) - 4 = 4 + 5x - 2$$

$$x + 30 - 40x - 4 = 4 + 5x - 2$$

$$x - 40x - 5x = 4 - 2 - 30 + 4$$

$$(-44)x = -24$$

$$x = \frac{-24}{-44} = \frac{6}{11}$$

Ecuación con denominadores.

En el caso de haber denominadores hay que tratarlos antes, hacemos:

1º Se calcula el mínimo común múltiplo de **todos** los denominadores de la ecuación.

2º Se reduce a común denominador: cada término se transforma en una fracción equivalente cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.

3º Se eliminan los denominadores (Explicación: al multiplicar ambos miembros por el denominador común se obtiene una ecuación equivalente).

4º Se resuelve la ecuación, ya sin denominadores.

Ejemplo

Con denominadores y sin paréntesis

$$-7 + \frac{x}{6} = \frac{7x}{2} - \frac{5}{3}$$

$$-\frac{42}{6} + \frac{1x}{6} = \frac{21x}{6} - \frac{10}{6}$$

$$-42 + 1x = 21x - 10$$

$$-21x + 1x = 42 - 10$$

$$-20x = 32$$

$$x = \frac{32}{-20} = -\frac{8}{5}$$